

DEL GROSSO

GL'INTEGRALI



NAZIONALE

BIBLIOTECA

B. Prov.
Miscellanea

C
24
164

VITTORIO EM. III

NAPOLI

BIBLIOTECA PROVINCIALE

mus. G. 24-164

Armadio



Palchetto

Num.° d'ordine *21.*





SUL MODO
DI RIDURRE GL' INTEGRALI
DELL' EQUAZIONI LINEARI DI PRIM' ORDINE A DIFFERENZE MISTE
IN SEMPLICI INTEGRALI DEFINITI

MEMORIA

DELL' AVATE

Remigio del Grosso

Professore di Astronomia Nautica nel Real Collegio degli Alunni Piloti di Napoli,
Socio ordinario dell' Accademia Pontaniana,
e Corrispondente del Real Istituto d' Incentivamento.

Estratto dal Vol. VI. de' li Atti dell' Accademia Pontaniana.



NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO DEL TRANATON
1854,

Il *Calcolo delle differenze miste*, ovvero quel ramo di Analisi Sublime, che versa sull'integrazione dell'equazioni, le quali contengono e variazioni finite e coefficienti differenziali di una funzione di più variabili, è trovato del Condorcet, come abbiamo dalla Storia delle Matematiche; e dal suo *Saggio sull'applicazione dell'Analisi alla probabilità delle decisioni* rilevasi qual uso mirabile abbia saputo farne questo chiaro Geometra. Due altri Geometri Francesi, suoi contemporanei ed ancor più valorosi di lui, dir voglio Laplace e Poisson, in seguito allargarono di molto i confini di questa teorica, come è dato vedere negli Atti dell'Accademia di Parigi e nel Giornale della Scuola Politecnica. Ma è al nostro chiarissimo Italiano Pietro Paoli, che si debbe la lode di averla completamente discorsa e sviluppata nel terzo de' suoi Opuscoli Matema-

tici, lavoro veramente originale del suo ingegno. Il procedimento seguito da questo rinomato Analista riducesi a cercare primamente un integral particolare della proposta equazione, e di poi a generalizzarlo sostituendo funzioni arbitrarie ad espressioni particolari, e mostrare che in questa guisa modificato ancor soddisfaccia alla equazione proposta. Questa maniera d' integrazione, comechè sia stata immaginata dall' immortale Lagrangia, pure non può negarsi che sia indiretta e particolare: onde se è vero che crescesci pregio e perfezione ad ogni qualunque scienza, allorchè le sue verità per via diretta e generale si dimostrano, forza è concludere, che riuscendosi ad integrare cotesto genere di equazione con metodo diretto e generale nè il tempo nè l' opera si getta via. Oltre di ciò è da notare che in tutte le integrazioni, che il nostro egregio Italiano imprende ad eseguire, si suppone che la *variabile per differenze finite* sia discontinua, e non capace di prendere altri valori, se non quelli de' numeri interi e positivi. Quindi, anche per questa altra ragione, il problema è sempre risoluto particolarmente, e lascia in chi legge un desiderio di più generale soluzione, sì che si estenda anche al caso, nel quale sia continua la variabile che riceve finiti incrementi.

La Memoria, che sommetto al sapiente giudizio di questa illustre Accademia, tende a ripianare cotesti due vuoti, che si ravvisano nella teorica dell' integrazione dell' equazioni a differenze miste dataci dal Paoli, e che sono di non piccol rilievo. In questo lavoro io ho preso a ridurre la determinazione di siffatto genere d' integrali a quella di semplici integrali definiti dipendenti da una novella variabile. Si comprende di leggieri che con questo

procedimento nulla si particolarizza circa l'indole della variabile, che nella proposta equazione cangia per differenza finita; e perciò l'integrale, che si ottiene, vale sì quando ella è discontinua, come quando è continua. Inoltre il metodo è diretto, e propriamente quello stesso metodo che si adopera nella ricerca degl'integrali definiti. E se non sempre è dato di far disparire da quest'integrali la novella variabile, e di ridurli a funzioni delle sole variabili contenute nell'equazione proposta, ma solo quando le variabili, che prendono incrementi finiti, sono discontinue, come dianzi abbiamo notato, cotesto per certo non toglie pregio al metodo, come tutti gli Analisti convengono. Siccome però troppo esteso è questo campo, mi son limitato in questa Memoria a considerare le sole equazioni a differenze miste e lineari del prim'ordine, riserbandomi in altro apposito lavoro di trattar dell'equazioni a differenze miste degli ordini superiori.

§. I.*

*Equazioni a differenze miste e lineari del prim' ordine
fra due variabili indipendenti.*

La forma più generale di quest' equazione si è

$$z_{x+1} = Az_x + B \frac{dz_x}{dy} + C \quad (1),$$

rappresentando A, B, C date funzioni delle due variabili x, y . Supponiamo primieramente $C=0$, ed A, B funzioni della sola variabile y , sì che abbiasi

$$z_{x+1} = A_y z_x + B_y \frac{dz_x}{dy} \quad (2);$$

e sia

$$z_x = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega \omega^x d\omega \quad (3)$$

l' integrale di questa equazione, rappresentando con ω una nuova variabile indipendente, con Ω una incognita funzione di y ed ω , e finalmente con ω', ω'' limiti indipendenti da y, x . Cangiando x in $x+1$ nella (3), si avrà

$$z_{x+1} = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega \omega^{x+1} d\omega,$$

e differenziando la medesima equazione rispetto ad y otterremo

$$\frac{dz_x}{dy} = \int_{\omega'}^{\omega''} \frac{d\Omega}{dy} \omega^x d\omega.$$

Ciò posto, la (2) si traduce in

$$0 = \int_{\omega'}^{\omega''} \omega^x d\omega \left\{ (x - A_y) \Omega - B_y \frac{d\Omega}{dy} \right\},$$

equazione alla quale si soddisfa ponendo

$$\omega = (x - A_y) \Omega - B_y \frac{d\Omega}{dy}.$$

Integrando questa equazione a differenze parziali, e completando l'integrale con una funzione arbitraria della nuova variabile ω , si avrà

$$\Omega = F(\omega) e^{\int \frac{x - A_y}{B_y} dy},$$

e quindi sostituendo nella (3) verrà per cercato integrale

$$z_x = \int_{\omega'}^{\omega''} F(\omega) e^{\int \frac{x - A_y}{B_y} dy} \omega^x d\omega \quad (4).$$

Questo integrale si riduce ad una funzione delle sole variabili x, y , come l'integrazione rispetto ad ω si sarà eseguita fra i limiti $\omega = \omega'$, $\omega = \omega''$, ed è un integrale completo poichè contiene anche dopo questa integrazione una funzione arbitraria o della sola y o di y ed x .

Poniamo per brevità

$$Y = \int \frac{A_y}{B_y} dy, \quad Y' = \int \frac{dy}{B_y} \quad (5),$$

e sostituendo nella (4), e cacciando fuori del segno $\int$ il fattore indipendente da ω , verrà

$$z_x = e^{-Y} \int_{\omega'}^{\omega''} e^{Y'} F(\omega) \omega^x d\omega.$$

Supponendo, come accade per l'ordinario, che la variabile x debba essere un numero intero > 0 , si ha per le note regole di differenziazione

$$\frac{d^x \cdot e^{Y'}}{(dY')^x} = \omega^x e^{Y'};$$

e però sostituendo nella precedente equazione verrà

$$z_x = e^{-Y} \int_{u^0}^{u^1} \frac{d^2 u}{(dY)^2} F(u) du.$$

Ma si sa che si può sempre soddisfare alla equazione

$$\int_{u^0}^{u^1} f(u, u) du = f(u),$$

e che in questo caso si ha (*)

$$\frac{d^2 f(u)}{du^2} = \frac{d^2 \cdot \int_{u^0}^{u^1} f(u, u) du}{du^2} = \int_{u^0}^{u^1} \frac{d^2 \cdot f(u, u)}{du^2} du.$$

In conseguenza sarà

$$z_x = e^{-Y} \cdot \frac{d^2 \cdot \Psi(Y')}{(dY)^2} \quad (6),$$

supponendo che Y ed Y' siano funzioni determinate per l'equazioni (5), e che $\Psi(Y')$ sia il valore dell'integrale definito

$$\int_{u^0}^{u^1} e^{uY'} F(u) du.$$

Quando C non è zero, ma sibbene una data funzione di y , se seguiranno a supporre che tali pur siano A, B , la (1) riducesi a

$$z_{x+1} = A_y z_x + B_y \frac{dz_x}{dy} + C_y \quad (7),$$

ed il valore di z_x , che soddisfa a questa equazione, può farsi dipendere da quello, che soddisfa alla (2), nel modo seguente. Supponiamo

$$z_x = z'_x + M_y,$$

(*) V. Cournot, traité élém. de la théor. des fonctions etc. tom II chap. XI.

e sia M_y una incognita funzione della variabile y : è chiaro che sarà

$$z_{x+1} = z'_{x+1} + M_y, \quad \frac{dz_x}{dy} = \frac{dz'_x}{dy} + \frac{dM_y}{dy}.$$

Sostituendo nella (7), avremo

$$z'_{x+1} + M_y = A_y (z'_x + M_y) + B_y \left(\frac{dz'_x}{dy} + \frac{dM_y}{dy} \right) + C_y.$$

A cagione di M_y funzione indeterminata di y , questa equazione si può scindere nelle altre due

$$(1 - A_y) M_y = B_y \frac{dM_y}{dy} + C_y$$

$$z'_{x+1} = A_y z'_x + B_y \frac{dz'_x}{dy}.$$

Ora ponendo mente all'equazioni (5), sarà facile persuadersi che l'integrale della prima di quest'equazione si è

$$M_y = -e^{r'-r} \int e^{r-r'} C_y dy',$$

supponendo = 0 la costante arbitraria, come qui dobbiamo fare, poichè ci bisogna un valore particolare di M_y ; ed il valore di z'_x è quello stesso che dà per z_x la equazione (6). In conseguenza l'integrale completo della (7) sarà

$$z_x = e^{-r} \left\{ \frac{r^x \cdot \psi(r')}{(dy')^x} - e^{r'} \int e^{r-r'} C_y dy' \right\} \quad (8).$$

Applichiamo questo procedimento di calcolo a qualche caso particolare. Supponiamo primieramente che A, B, C siano quantità costanti, e sarà

$$r = \frac{A \cdot y}{B}, \quad r' = \frac{y}{B}, \quad \int e^{r-r'} C_y dy' = \frac{C}{A-1} e^{\left(\frac{A-1}{B}\right)y},$$

$$(dy')^x = B^{-x} dy^x,$$

Sostituendo questi valori nella (8) si avrà

$$z_x = e^{-\frac{A}{2}y} \left\{ B \frac{d^2 \downarrow(y)}{dy^2} - \frac{C}{A-1} e^{\left(\frac{A-1}{2}\right)y} \right\}.$$

Quando $C=0$, si ottiene

$$z_x = B e^{-\frac{A}{2}y} \frac{d^2 \downarrow(y)}{dy^2},$$

integrale identico a quello ottenuto dal Paoli per mezzo di considerazioni tutte diverse (*).

Sia di bel nuovo $C=0$, ed A, B funzioni della sola x senza y , sì che la (1) diventi

$$z_{x+y} = A_x z_x + B_x \frac{dz_x}{dy} \quad (9).$$

Rappresentando con Ω una incognita funzione di x ed ω , si ponga esser l'integrale della proposta equazione

$$z_x = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega_x e^{\omega y} d\omega;$$

e risultando in questa ipotesi

$$z_{x+y} = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega_{x+y} e^{\omega y} d\omega, \quad \frac{dz_x}{dy} = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega_x \omega e^{\omega y} d\omega,$$

sostituendosi nella (9) si avrà evidentemente

$$0 = \int_{\omega'}^{\omega''} e^{\omega y} d\omega \left\{ \Omega_{x+y} - (A_x + \omega B_x) \Omega_x \right\}.$$

Si soddisfa a questa equazione supponendo

$$\Omega_{x+y} - (A_x + \omega B_x) \Omega_x = 0 \quad (10).$$

(*) V. il III° opuscolo di questo celebre Analista Italiano, §. 1.^a

Ora se si pone per brevità

$$A_x = B_x a_x, \quad \Pi_{x-1}(B) = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \dots B_{x-1}, \\ (a+a_1)(a+a_2)(a+a_3) \dots (a+a_{x-1}) = a^{x-1} + M'_x a^{x-2} + \dots + M_x(a) \\ = S_{x-1} M_x(a) a^{x-1},$$

l'integrale della (10) sarà

$$\Omega_x = \Pi_{x-1}(B_i) S_{x-1} M_x(a) a^{x-1} F(a).$$

Sostituendo questo valore nel supposto integrale della (9), troveremo

$$z_x = \Pi_{x-1}(B_i) S_{x-1} M_x(a) \int_0^{a^{x-1}} F(a) e^{ay} a^{x-1} da.$$

Ma questo integrale si può semplificare ancora di più. Di fatti si ha

$$e^{ay} a^{x-1} = \frac{d^{x-1} e^{ay}}{dy^{x-1}},$$

onde per quello che si è detto antecedentemente sarà

$$\int_0^{a^{x-1}} F(a) e^{ay} a^{x-1} da = \int_0^{a^{x-1}} \frac{d^{x-1} e^{ay}}{dy^{x-1}} \cdot F(a) da = \frac{d^{x-1} \downarrow(y)}{dy^{x-1}},$$

e quindi il valore di z_x sarà dato dalla equazione

$$z_x = \Pi_{x-1}(B_i) S_{x-1} M_x(a) \frac{d^{x-1} \downarrow(y)}{dy^{x-1}} \quad (11).$$

Per applicare questa formola ad un caso particolare supponiamo che si debba sommare la serie infinita

$$z_x = 1 - xy + \frac{x(x+1)}{2} y^2 - \frac{x(x+1)(x+2)}{2 \cdot 3} y^3 + \dots \quad (12).$$

Ponendo $x+1$ in luogo di x in questa equazione, verrà

$$z_{x+1} = 1 - (x+1)y + \frac{(x+1)(x+2)}{2} y^2 - \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{2 \cdot 3} y^3 + \dots$$

e differenziandola rispetto ad y

$$\frac{dz_x}{dy} = -x + x(x+1)y - \frac{x(x+1)(x+2)}{2} y^2 + \dots$$

Di qui risulta evidentemente

$$-\frac{1}{x} \frac{dz_x}{dy} = 1 - (x+1)y + \frac{(x+1)(x+2)}{2} y^2 - \dots = z_{x+1};$$

onde l'equazione a differenze miste, che bisogna integrare per ottenere la somma della serie (12), sarà

$$z_{x+1} = -\frac{1}{x} \frac{dz_x}{dy}.$$

Paragonando questa equazione con la (9) si ha

$$A_x = 0, \quad B_x = -\frac{1}{x}; \text{ e quindi } a_x = 0, \quad S_1^{x-1} M_x(C) = 1$$

$$\Pi_1^{x-1}(B_1) = \frac{(-1)^x}{\Gamma(x)},$$

rappresentando con Γ la funzione Euleriana di seconda specie. In conseguenza sostituendo nella (11) si avrà

$$z_x = \frac{(-1)^x}{\Gamma(x)} \cdot \frac{d^x \psi(y)}{dy^x}$$

risultando $i=0$.

Per fare un'altra applicazione delle formole precedenti suppongo che si abbia a risolvere il seguente problema. Un solido (S) è tagliato da una serie di piani paralleli ed equidistanti. Nella comune intersezione (C) di uno di questi piani colla superficie del proposto solido si prenda a piacimento un punto (M), e per esso si meni la normale (N) a (C), e si faccia passare un piano (P) perpendicolare a quello della curva suddetta. Sia (C') la comune sezione di (P) colla superficie di (S), e (K) la corda

che sottende l'arco di (C') compreso fra il piano di (C) ed il piano parallelo seguente. Or si suppone che la normale (N) e la corda (K) fanno angoli eguali colla comune intersezione de' piani delle curve (C) e (C') , e si domanda l'equazione della superficie, da cui è terminato il solido (S) .

Siano due piani rispettivamente paralleli a quelli delle curve (C) , (C') i piani delle coordinate rettangole (y, z) , (x, z) : è chiaro che la comune intersezione di questi due piani coordinati, ovvero l'asse delle z , riuscirà parallela alla comune sezione de' piani delle curve (C) , (C') , ed il problema proposto si riduce a trovare l'equazione della superficie del solido, supponendo che (N) e (K) facciano angoli eguali coll'asse delle z . Posto ciò, se la distanza de' due piani paralleli consecutivi, che tagliano il solido, si pone $=1$, la cotangente dell'angolo che (K) fa coll'asse delle z è evidentemente $\frac{z_{x+1} - z_x}{1} = z_{x+1} - z_x$. La cotangente dell'angolo che (N) fa col medesimo asse è $-\frac{dz_x}{dy}$; onde per le condizioni del problema proposto sarà

$$z_{x+1} - z_x = -\frac{dz_x}{dy}$$

l'equazione a differenze miste della superficie di (S) . Paragonando questa equazione colla (9) si trova $A_x = 1$, $B_x = -1$, e per conseguenza

$$\Omega_x = (1-x)^x F(x) \\ z_x = \int_{x_1}^{x_2} (1-x)^x e^{xy} F(x) dx.$$

Sviluppando in serie $(1-x)^x$, si ottiene

$$z_x = \int_{x_1}^{x_2} e^{xy} F(x) dx - x \int_{x_1}^{x_2} \frac{d \cdot e^{xy}}{dy} F(x) dx + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 \cdot e^{xy}}{dy^2} F(x) dx \\ - \dots \dots \dots$$

*

e più semplicemente ancora

$$z_1 = \psi(y) - x \frac{d\psi(y)}{dy} + \frac{x(x-1)}{1.2} \frac{d^2\psi(y)}{dy^2} - \dots$$

supponendo secondo il solito

$$\psi(y) = \int_a^y e^{-y} F(x) dx.$$

Risulta quindi dalla trovata espressione di z_1 che il problema proposto è indeterminato, quando non è data la forma della curva (C).

Se per un caso particolare si suppone essere

$$z_1 = Ay^2 + By + C$$

l'equazione della curva (C) nel caso di $x=0$, la espressione di z_1 cambia in

$$\psi(y) = Ay^2 + By + C.$$

Da questa equazione si deduce

$$\frac{d\psi(y)}{dy} = 2Ay + B, \quad \frac{d^2\psi(y)}{dy^2} = 2A, \quad \frac{d^3\psi(y)}{dy^3} = 0, \dots$$

onde per un qualunque valore di x avremo

$$z_1 = A(y-x)^2 + B(y-x) - Ax + C;$$

e questa sarà l'equazione in termini finiti della superficie, da cui è terminato il solido (S).

Se C non è zero, ma invece è funzione della sola x , come sono A, B , la (1), che in questa ipotesi diventa

$$z_{x+1} = A_x z_x + B_x \frac{dz_x}{dy} + C_x \quad (13),$$

s'integrerà nel modo seguente. Posto

$$z_x = v_x + N_x,$$

rappresentando N_x una funzione incognita della sola variabile x , sarà

$$z_{x+1} = z'_{x+1} + N_{x+1}, \quad \frac{dz_x}{dy} = \frac{dz'_x}{dy}.$$

Sostituendo nella proposta equazione avremo

$$z'_{x+1} + N_{x+1} = A_x (z'_x + N_x) + B_x \frac{dz'_x}{dy} + C_x;$$

e quindi a cagione di N_x funzione indeterminata

$$\left. \begin{aligned} N_{x+1} &= A_x N_x + C_x \\ z'_{x+1} &= A_x z'_x + B_x \frac{dz'_x}{dy} \end{aligned} \right\} (14)$$

Ora l'integrale della prima di quest'equazioni si e, come ognuno sa,

$$N_x = \Pi_{1,x}^{-1}(A_1) \mathfrak{Z} \frac{C_x}{\Pi_{1,x}(A_1)},$$

rappresentando $\mathfrak{Z}$ il segno d'integrazione relativo alle differenze finite; e l'integrale dell'altro è dato dalla equazione (11). Laonde quando A, B, C sono date funzioni della sola variabile x , il completo integrale della (1) sarà

$$z_x = \Pi_{1,x}^{-1}(A_1) \mathfrak{Z} \frac{C_x}{\Pi_{1,x}(A_1)} + \Pi_{1,x}^{-1}(B_1) S_{1,x}^{-1} M_{1,x}^{(1)} \frac{d^{x-1} \downarrow(y)}{dy^{x-1}} \quad (15).$$

Poniamo per es. che sia data ad integrare l'equazione

$$z_{x+1} = z_x + x \frac{dz_x}{dy} + x^2,$$

e sarà

$$A_x = 1, \quad B_x = x, \quad C_x = x^2, \quad \Pi_{1,x}^{-1}(A_1) = 1$$

$$\mathfrak{Z} \frac{C_x}{\Pi_{1,x}(A_1)} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}.$$

In conseguenza l'integrale della prima delle (14) sarà

$$N_x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$

o più semplicemente

$$N_x = \frac{x(x-1)(2x-1)}{2 \cdot 3}.$$

Per ciò che riguarda l'integrale dell'altra osserveremo che essendo $A=1$, $B=x$, sarà

$$\begin{aligned} \Pi_{i=1}^{x-1} (B_i) S_{i=1}^{x-1} M_{i=1}^{(1)} x^{x-1} &= (x+1)(2x+1)(3x+1) \dots ((x-1)x+1) \\ &= x^{x-1} \left[\frac{1}{x} + 1 \right] \left[\frac{1}{x} + 2 \right] \left[\frac{1}{x} + 3 \right] \dots \left[\frac{1}{x} + x-1 \right]. \end{aligned}$$

Ma sappiamo, che essendo in generale

$$\int e^{-\beta} \beta^{x-1} d\beta = \frac{1}{q} \beta^q e^{-\beta} + \frac{1}{q} \int e^{-\beta} \beta^q d\beta,$$

se questa integrazione si esegue fra i limiti $\beta=0$, $\beta=\infty$, a cagione di $\beta^q e^{-\beta}=0$, si ha

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta} \beta^{x-1} d\beta = \frac{1}{q} \int_0^{\infty} e^{-\beta} \beta^q d\beta$$

o più semplicemente

$$\Gamma(q) = \frac{1}{q} \Gamma(q+1),$$

e quindi

$$\Gamma(q+1) = \frac{1}{q+1} \Gamma(q+2),$$

$$\Gamma(q+2) = \frac{1}{q+2} \Gamma(q+3)$$

.....

$$\Gamma(q+h-1) = \frac{1}{q+h-1} \Gamma(q+h).$$

In conseguenza sarà

$$\Gamma(q+h) = q(q+1)(q+2) \dots (q+h-1) \Gamma(q).$$

Ponendo $q = \frac{1}{\omega}$, $h = x$, questa equazione si cangia in

$$\Gamma\left[\frac{1}{\omega} + x\right] = \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{\omega} + 1\right] \left[\frac{1}{\omega} + 2\right] \dots \left[\frac{1}{\omega} + x - 1\right] \Gamma\left[\frac{1}{\omega}\right];$$

e quindi dividendo per $\frac{1}{\omega} \Gamma\left(\frac{1}{\omega}\right)$ verrà

$$\left[\frac{1}{\omega} + 1\right] \left[\frac{1}{\omega} + 2\right] \left[\frac{1}{\omega} + 3\right] \dots \left[\frac{1}{\omega} + x - 1\right] = \frac{\omega \Gamma\left[\frac{1}{\omega} + x\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{\omega}\right]}.$$

Finalmente moltiplicando questa equazione per ω^{x-1} , sarà

$$\Pi_{1, x-1} (B_1) S_{1, x-1} M_x(\omega) \omega^{x-1} = \frac{\omega^x \Gamma\left[\frac{1}{\omega} + x\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{\omega}\right]},$$

e però l'integrale completo della proposta sarà

$$z_x = \frac{x(x-1)(2x-1)}{2.3} + \int_{\omega}^{\infty} \frac{\omega^x \Gamma\left[\frac{1}{\omega} + x\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{\omega}\right]} e^{y\omega} F(\omega) d\omega,$$

e più semplicemente ancora

$$z_x = \frac{x(x-1)(2x-1)}{2.3} + \int_{\omega}^{\infty} \frac{\Gamma\left[\frac{1}{\omega} + x\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{\omega}\right]} \cdot \frac{d\omega}{dy^x} e^{y\omega} F(\omega) d\omega$$

Cerchiamo da ultimo il metodo da seguire nella integrazione della (1), quando i coefficienti A, B, C sono funzioni di entrambe le variabili x, y . A tal fine rappresentino u_x, v_x due funzioni arbitrarie di coteste variabili, e posto

$$z_x = u_x v_x,$$

sarà evidentemente

$$z_{x+1} = u_{x+1} v_{x+1}, \quad \frac{dz_x}{dy} = v_x \frac{du_x}{dy} + u_x \frac{dv_x}{dy}.$$

Questi valori sostituiti nella (1) danno

$$u_{x+1}, v_{x+1} = A u_x v_x + B \left[v_x \frac{dv_x}{dy} + u_x \frac{dv_x}{dy} \right] + C \quad (16);$$

onde a cagione delle funzioni arbitrarie u_x, v_x , potrà questa equazione scindersi nelle altre due

$$\left. \begin{aligned} 0 &= A u_x + B \frac{du_x}{dy} \\ v_{x+1} &= \frac{B v_x}{u_{x+1}} \cdot \frac{dv_x}{dy} + \frac{C}{u_{x+1}} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

La prima di quest'equazioni essendo equazione a differenziali parziali, avrà per integral completo

$$u_x = F(x) e^{-\int \frac{A}{B} dy}$$

Se non che bastando conoscere un valore particolare di u_x , per avere con tutta la generalità quello di z_x , poichè il valore di v_x deve contenere necessariamente una funzione arbitraria, noi scriveremo più semplicemente

$$u_x = e^{-\int \frac{A}{B} dy} = e^{-r_x},$$

e quindi sarà

$$v_{x+1} = e^{-r_{x+1}}$$

Sostituendo questi valori nella seconda dell'equazioni (17) troveremo

$$v_{x+1} = B e^{r_x} \cdot \frac{dv_x}{dy} + C e^{r_{x+1}} \quad (18),$$

ponendo per brevità $\Delta Y_{x+1} = Y_{x+1} - Y_x$. Questa equazione darà v_x , e così il problema sarà completamente risoluto.

L'equazione (18) non ancora si è potuta integrare nella sua generalità. Vi sono non per tanto alcuni casi,

nei quali se ne può ottenere l'integrale in termini finiti ;
e sarà utile occuparcene in questo luogo. Sia primieramente

$$Be^{\Delta x} = 1 ,$$

e la (18) diventerà

$$v_{x+1} = \frac{dv_x}{dy} + Ce^{x_{x+1}} .$$

Poniamo adesso

$$v_x = \frac{d^x \Omega_x}{dy^x} ;$$

e risultando in questa ipotesi

$$v_{x+1} = \frac{d^{x+1} \Omega_{x+1}}{dy^{x+1}} , \quad \frac{dv_x}{dy} = \frac{d^{x+1} \Omega_x}{dy^{x+1}} ,$$

avremo

$$\frac{d^{x+1} \Omega_{x+1}}{dy^{x+1}} = \frac{d^{x+1} \Omega_x}{dy^{x+1}} + Ce^{x_{x+1}} ;$$

ovvero , posto

$$\Delta_x \Omega_x = \Omega_{x+1} - \Omega_x ,$$

sarà più semplicemente

$$\frac{d^{x+1} \Delta_x \Omega_x}{dy^{x+1}} = Ce^{x_{x+1}} .$$

Integrando questa equazione rispetto alla differenziale dy ,
si avrà

$$\Delta_x \Omega_x = \int^{x+1} Ce^{x_{x+1}} dy^{x+1} ;$$

ed in seguito integrando rispetto alla differenza finita, verrà

$$\Omega_x = \Sigma_x \int^{x+1} Ce^{x_{x+1}} dy^{x+1} + F(y) ,$$

ove si aggiugne la funzione arbitraria $F(y)$, perchè l'in-

tegrale finito si prende rispetto ad x nella ipotesi di y costante. Di qui poi risulta

$$r_x = \frac{d^x \Omega_x}{dy^x} = \frac{d^x F(y)}{dy^x} + \frac{d^x \Sigma_x \int^{x+1} C e^{r_{x+1}} dy^{x+1}}{dy^x},$$

ed il cercato valore di z_x sarà

$$z_x = e^{-r_x} \cdot \frac{d^x F(y)}{dy^x} + e^{-r_x} \cdot \frac{d^x \Sigma_x \int^{x+1} C e^{r_{x+1}} dy^{x+1}}{dy^x} \quad (19).$$

La supposizione di $B e^{\Delta Y_x} = 1$ importa che tra i coefficienti A, B della proposta equazione (1) esista una certa relazione. Per porla in evidenza, risolveremo logicamente l'equazione $B e^{\Delta Y_x} = 1$, e verrà

$$\Delta Y_x + \log B = 0;$$

e poscia ponendo in luogo di ΔY_x il suo valore, sarà

$$\left(\frac{A_{x+1}}{B_{x+1}} - \frac{A_x}{B_x} \right) dy + \log B_x = 0.$$

Finalmente differenziando rispetto ad y , e liberando dai fratti l'equazione risultante, avremo

$$A_{x+1} B_x - A_x B_{x+1} + B_{x+1} \frac{dF_{x+1}}{dy} = 0. \quad (20)$$

Dunque tutte le volte che i coefficienti A, B della proposta equazione (1) soddisfanno alla (20), l'integrale di quella equazione sarà dato dalla (19).

Supponiamo per un caso particolare che voglia sommarsi la serie infinita

$$z_x = \frac{e^{x \cdot y}}{x+1} + \frac{e^{(x+1) \cdot y}}{(x+2)^2} + \frac{e^{(x+2) \cdot y}}{(x+3)^3} + \dots \quad (21)$$

Ponendo $x+t$ in luogo di x in questa serie, verrà

)(21)(

$$z_{x+1} = \frac{e^{(x+1)y}}{x+2} + \frac{e^{(x+1)y}}{(x+3)^2} + \dots,$$

e conseguentemente

$$z_{x+1} + e^{xy} = e^{xy} + \frac{e^{(x+1)y}}{x+2} + \frac{e^{(x+1)y}}{(x+3)^2} + \dots \quad (22)$$

Ma differenziando la proposta serie rispetto ad y si ottiene

$$\frac{dz_x}{dy} = \frac{xe^{xy}}{x+1} + \frac{(x+1)e^{(x+1)y}}{(x+2)^2} + \frac{(x+2)e^{(x+1)y}}{(x+3)^3} + \dots;$$

onde verrà

$$z_x + \frac{dz_x}{dy} = e^{xy} + \frac{e^{(x+1)y}}{x+2} + \frac{e^{(x+1)y}}{(x+3)^2} + \dots$$

Essendo adunque il secondo membro di questa equazione identico con quello della (22), sarà

$$z_{x+1} + e^{xy} = z_x + \frac{dz_x}{dy};$$

e quindi bisognerà integrare l'equazione a differenze miste

$$z_{x+1} = z_x + \frac{dz_x}{dy} - e^{xy} \quad (23)$$

per ottenere la somma della serie (21).

Paragonando questa equazione colla (1) troveremo $A_x = 1$, $B_x = 1$, $C_x = -e^{xy}$; e però risultando $A_{x+1} = 1$, $B_{x+1} = 1$, $\frac{dB_x}{dy} = 0$, sarà soddisfatta l'equazione di condizione (20). Inoltre essendo

$$Y_x = y, \quad e^{Y_{x+1}} = e^y,$$

sarà evidentemente

$$Ce^{Y_x} = -e^{y(x+1)},$$

e l'equazione (19) diventerà

$$z_x = e^{-x} \left\{ \frac{d^x F(y)}{dy^x} - \frac{d^x \Sigma_x \int^{x+1} e^{(x+1)y} dy^{x+1}}{dy^x} \right\}$$

Ora si ha per le note regole di Calcolo Integrale

$$\int^{x+1} e^{(x+1)y} dy^{x+1} = \frac{e^{(x+1)y}}{(x+1)^{x+1}};$$

onde risulterà

$$\Sigma_x \int^{x+1} e^{(x+1)y} dy^{x+1} = \Sigma_x \frac{e^{(x+1)y}}{(x+1)^{x+1}}.$$

Non potendosi ottenere in termini finiti il valore di questo integrale, sarà la funzione cercata

$$z_x = e^{-x} \left\{ \frac{d^x F(y)}{dy^x} - \frac{d^x \cdot \Sigma_x (x+1)^{-(x+1)} e^{(x+1)y}}{dy^x} \right\}.$$

Ritornando alla equazione (18) supponiamo in secondo luogo che sia

$$C e^{r_{x+1}} = M = \text{costante}.$$

Posto $v_x = v'_x + M$, avremo

$$v_{x+1} = v'_{x+1} + M, \quad \frac{dv_x}{dy} = \frac{dv'_x}{dy}$$

Sostituendo nella (18) troveremo,

$$v'_{x+1} + M = B e^{a r_x} \frac{dv'_x}{dy} + M,$$

ovveramente

$$v'_{x+1} = K_x \frac{dv'_x}{dy},$$

ponendo per maggiore semplicità $K_x = B e^{a r_x}$. Poniamo successivamente in questa equazione

$$x=0, 1, 2, 3 \dots, x-1,$$

e verrà

$$v'_1 = R_1 \frac{dv'_0}{dy}; \quad v'_2 = R_2 \frac{dv'_1}{dy}; \quad v'_3 = R_3 \frac{dv'_2}{dy}; \quad \dots$$

Se dunque faremo

$$\frac{dv'_2}{dy} = F(y),$$

si avrà evidentemente

$$v'_1 = K_0 F(y); \quad v'_2 = \frac{K_1 d. K_0 F(y)}{dy}; \quad v'_3 = \frac{K_2 d. K_1 d. K_0 F(y)}{dy^2}$$

e finalmente

$$v'_x = \frac{K_{x-1} d. K_{x-2} d. K_{x-3} d. \dots K_0 F(y)}{dy^{x-1}};$$

onde il cercato valore di v_x sarà

$$v_x = M + \frac{K_{x-1} d. K_{x-2} d. K_{x-3} d. \dots K_0 F(y)}{dy^{x-1}}.$$

Che se K_x risulta funzione di una sola delle variabili x, y , il valore di v'_x si potrà più semplicemente ottenere per mezzo degl' integrali definiti, come si è fatto valere precedentemente. Anzi quando K_x è funzione della sola x , risultando

$$\frac{dK_x}{dy} = 0,$$

il valore di v_x sarà

$$v_x = M + K_1 K_2 \dots K_{x-1} \frac{d^{x-1} F(y)}{dy^{x-1}}$$

A fine di applicare questa teorica ad un caso particolare, supponiamo che debbasi integrare l'equazione

$$z_{x+1} = \frac{x}{y} z_x + y \frac{dz_x}{dy} + 2e^{\frac{x+1}{y}}.$$

Essendo in questa ipotesi $A = \frac{x}{y}$, $B = y$, $C = 2e^{\frac{x+1}{y}}$, sarà

)(24)(

$$Y_x = \int \frac{A}{B} dy = x \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{x}{y}; \quad Y_{x+1} = -\frac{x+1}{y}; \quad \Delta Y_x = -\frac{1}{y},$$

e conseguentemente

$$M = C e^{Y_{x+1}} = 2 e^{\frac{x+1}{y}} e^{-\frac{x+1}{y}} = 2; \quad K^x = B e^{\Delta Y_x} = y e^{-\frac{1}{y}};$$

e però il valore di v'_x dipenderà dalla integrazione dell'equazione

$$v'_{x+1} = y e^{-\frac{1}{y}} \frac{dv'_x}{dy}.$$

Paragonando questa equazione con la (2) si ha

$$A_y = 0, \quad B_y = y e^{-\frac{1}{y}},$$

e quindi sarà

$$Y = 0, \quad Y' = \int \frac{dy}{B} = \int \frac{e^{\frac{1}{y}} dy}{y};$$

onde sostituendo questi valori nella (6) troveremo

$$v'_x = \frac{dx \cdot \left[\int \frac{e^{\frac{1}{y}} dy}{y} \right]}{d \left[\int \frac{e^{\frac{1}{y}} dy}{y} \right]^x} \cdot \frac{d \left[\int \frac{e^{\frac{1}{y}} dy}{y} \right]^x}{dy^x}.$$

Trovato questo valore di v'_x , si avrà quello di v_x dalla equazione

$$v_x = 2 + \frac{dx \cdot \left[\int \frac{e^{\frac{1}{y}} dy}{y} \right]}{d \left[\int \frac{e^{\frac{1}{y}} dy}{y} \right]^x} \cdot \frac{d \left[\int \frac{e^{\frac{1}{y}} dy}{y} \right]^x}{dy^x}.$$

Ma abbiamo detto dover essere $z_x = u_x v_x$, ed in questa ipotesi risulta

$$v_x = e^{\frac{1}{y}}$$

In conseguenza sarà

$$z_x = e^{\frac{1}{y}} \left\{ 2 + \frac{d^2 \cdot \int \left[\frac{e^{\frac{1}{y}} dy}{y} \right]}{d \left[\left(\frac{e^{\frac{1}{y}} dy}{y} \right)^2 \right]} \cdot \frac{d \left[\left(\frac{e^{\frac{1}{y}} dy}{y} \right)^2 \right]}{dy^2} \right\}.$$

§. II.°

*Equazioni a differenze miste lineari del prim' ordine ,
e fra tre o più variabili indipendenti.*

L'equazioni a differenze miste lineari del prim'ordine fra tre variabili indipendenti x, y, u non possono ridursi che ad una delle seguenti forme

$$\left. \begin{aligned} z_{x+1} &= Az + B \frac{dz}{dy} + C \frac{dz}{du} + D \\ z_{x+1} &= Az + Bz_{y+1} + C \frac{dz}{du} + D \end{aligned} \right\} (1);$$

rappresentando A, B, C, D date funzioni delle tre variabili suddette. Supponiamo primieramente che voglia integrarsi la prima di quest'equazioni, ed in essa sia $D=0$, ed A, B, C funzioni di y, u senza x , per modo che abbiai

$$z_{x+1} = Az + B \frac{dz}{dy} + C \frac{dz}{du} \quad (2).$$

Se si suppone che l'integrale di questa equazione sia

$$z = \int_{\omega}^{\omega'} \Omega x^{\omega} d\omega \quad (3),$$

e che Ω rappresenti una incognita funzione di y, u, ω , sarà

$$z_{x+1} = \int_{\omega}^{\omega'} \Omega x^{\omega+1} d\omega, \quad \frac{dz}{dy} = \int_{\omega}^{\omega'} \frac{d\Omega}{dy} x^{\omega} d\omega, \quad \frac{dz}{du} = \int_{\omega}^{\omega'} \frac{d\Omega}{du} x^{\omega} du.$$

Riducendo a zero l'equazione (2), e sostituendovi questi valori, troveremo

$$0 = \int_{\omega}^{\omega'} x^{\omega} d\omega \left\{ (A-x)\Omega + B \frac{d\Omega}{dy} + C \frac{d\Omega}{du} \right\}.$$

nella quale si soddisfa supponendo

$$0 = (A-x)\Omega + B \frac{d\Omega}{dy} + C \frac{d\Omega}{du},$$

ovveramente supponendo

$$0 = A-x + B \frac{d \cdot \log \Omega}{dy} + C \frac{d \cdot \log \Omega}{du}.$$

Quindi se si fa

$$\log \Omega = W,$$

l'equazione a differenziali parziali, che dovrà esser soddisfatta per la soluzione del proposto problema, sarà

$$0 = A-x + B \frac{dW}{dy} + C \frac{dW}{du} \quad (4).$$

Ora si sa, che ponendo

$$\left. \begin{aligned} B dW - (x-A) dy &= 0 \\ B du - C dy &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5),$$

e rappresentando per W, T, V gl'integrali di queste due equazioni, si ha

$$W = T + \log F(U, \omega),$$

poichè quest'integrali si prendono supponendo ω costante.

In conseguenza sarà

$$\Omega = e^{W} = e^{T} F(U, \omega).$$

Sostituendo questo valore di Ω nella equazione (3), si avrà pel cercato valore di z

$$z = \int_{\omega}^{\omega''} F(U, \omega) e^{T} \omega^x d\omega \quad (6).$$

Supponiamo per un caso particolare A, B, C funzioni della sola variabile y : è chiaro che gl' integrali delle (5) saranno in questa ipotesi

$$W = \int \frac{dy}{B} + \int \frac{A}{B} dy = W = \omega Y' + Y$$

$$u = \int \frac{C}{B} dy = u = Y''.$$

Sarà dunque in questo caso

$$\Omega = e^{-r + u r} F(u - Y'', \omega),$$

e la (6) diventerà

$$z = e^{-r} \int_{\omega}^{\omega''} F(u - Y'', \omega) e^{u r} \omega^x d\omega.$$

Se si suppone che la variabile x debba essere un numero intero > 0 , sarà, come dianzi abbiamo osservato

$$\frac{d^x e^{u r}}{dY''^x} = e^{u r} \omega^x;$$

onde sostituendo nel trovato integrale verrà

$$z = e^{-r} \int_{\omega}^{\omega''} F(u - Y'', \omega) \frac{d^x e^{u r}}{dY''^x} d\omega,$$

ed anche più semplicemente

$$z = e^{-r} \frac{d^x}{dY''^x} \int_{\omega}^{\omega''} F(u - Y'', \omega) e^{u r} d\omega,$$

A

purchè però nell' eseguire le differenziazioni rispetto ad Y' si consideri $u - Y''$ come costante. Adunque essendo

$$\int_{\alpha}^{\alpha'} F(u - Y'', \alpha) e^{\alpha Y'} d\alpha = \Psi(u - Y'', Y'),$$

sarà il cercato valore di z definito per l' equazione

$$z = e^{-Y'} \frac{d^x \cdot \Psi(u - Y'', Y')}{dY'^x} \quad (7),$$

purchè nell' eseguire le differenziazioni si riguardi $u - Y''$ come quantità costante.

Quando A, B, C sono quantità costanti, si ha evidentemente

$$Y = \frac{A \cdot y}{B}, \quad Y' = \frac{y}{B}, \quad Y'' = \frac{C \cdot y}{B}, \quad dY' = B^{-1} dy.$$

Ponendo questi valori nella (7) verrà

$$z = e^{-\frac{A \cdot y}{B}} B^x \frac{d^x \cdot \Psi(Bu - Cy, y)}{dy^x},$$

avvertendo sempre che le differenziazioni si debbono eseguire supponendo $Bu - Cy$ come quantità costante. A questo medesimo risultamento è pervenuto il Paoli per mezzo di considerazioni tutte diverse dalle nostre, come può vedersi nel citato suo Opuscolo (*).

Con un ragionamento tutto simile al precedente troveremo che l'integrale completo dell' equazione del prim' ordine

$$z_{x+1} = Az + B \frac{dz}{dy} + C \frac{dz}{du} + D \frac{dz}{dv} + \dots \quad (8)$$

tra un numero qualunque di variabili $x, y, u, v, \dots$ si avrà per la equazione

(*) V. il §. 25.

$$z = \int_{\omega}^{\omega'} F(U, V, \dots, \omega) e^T \omega^x d\omega \quad (9)$$

purchè $A, B, C, D \dots$ siano funzioni di $y, u, v, \dots$ senza x , e se, posto

$$\log \Omega = W,$$

si suppone che $W, T, U, V, \dots$ siano gl' integrali dell' equazioni differenziali simultanee

$$BdW - (x - A)dy = 0$$

$$Bdu - Cdy = 0$$

$$Bdv - Ddy = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

Quindi se per una particolare ipotesi supponiamo che $A, B, C, D, \dots$ siano funzioni della sola y , sarà

$$z = e^{-T} \frac{dx \cdot \downarrow (u - Y'', v - Y''', \dots, Y^n)}{dY'^x}$$

ciò che diventa la (9), purchè le differenziazioni si eseguiscano supponendo costanti $u - Y'', v - Y''', \dots$. Che se invece supponiamo che $A, B, C, D, \dots$ sono quantità costanti, verrà

$$z = e^{-\frac{dx}{y}} B^x \cdot \frac{dx \cdot \downarrow (Bu - Cy, Bv - Dy, \dots, y)}{dy^x}$$

Cerchiamo adesso l'integrale della (2), supponendo che A, B, C siano funzioni della sola variabile x . Poniamo a tal fine

$$z = \int_{\omega}^{\omega'} \Omega_x e^{(x+\beta\gamma)\omega} d\omega,$$

e sia la quantità β una costante arbitraria, ed Ω una funzione arbitraria di ω ed x . Ponendo $x+1$ in luogo di x in questa equazione, avremo

*

$$z_{x+1} = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega_{x+1} e^{(u+\beta r)u} d\omega;$$

e differenziando la medesima equazione successivamente rispetto ad x ed y , verrà

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du} &= \int_{\omega'}^{\omega''} \alpha \Omega_x e^{(u+\beta r)u} d\omega \\ \frac{dz}{dy} &= \int_{\omega'}^{\omega''} \beta \alpha \Omega_x e^{(u+\beta r)u} d\omega. \end{aligned}$$

Sostituendo tutti questi valori nella (2) dopo di averla ridotta a zero, troveremo

$$0 = \int_{\omega'}^{\omega''} e^{(u+\beta r)u} d\omega \left\{ \Omega_{x+1} - \Omega_x (A + \alpha(B\beta + C)) \right\}.$$

A questa equazione si soddisfa ponendo

$$\Omega_{x+1} - \Omega_x (A + \alpha(B\beta + C)) = 0,$$

onde la soluzione di questo problema rientra in quella di un problema già proposto nel §. precedente. Lo stesso vale per l'equazione (8) quando $A, B, C, D, \dots$ sono funzioni della sola variabile x .

Finalmente supponiamo che nella (2) i coefficienti A, B, C siano funzioni di x , e di un'altra sola delle due rimanenti variabili y, u , per esempio di y . Posto

$$z = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega_x e^{uv} d\omega,$$

e rappresentando Ω_x una indeterminata funzione di x ed y , si avrà

$$\begin{aligned} z_{x+1} &= \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega_{x+1} e^{uv} d\omega, \quad \frac{dz}{dy} = \int_{\omega'}^{\omega''} \frac{d\Omega_x}{dy} e^{uv} d\omega \\ \frac{dz}{du} &= \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega_x e^{uv} v d\omega. \end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nella (2), si avrà per determinare Ω_x la seguente equazione a differenze miste e fra due variabili indipendenti

$$\Omega_{x+1} = (A + Cx)\Omega_x + B \frac{d\Omega_x}{dy}.$$

In conseguenza il problema si riduce a quanto abbiamo detto nel §. 1.°. E questo canone si può estendere anche all'equazione (8), purchè $A, B, C, D, \dots$ siano funzioni di x e di un'altra medesima variabile $y, u, v, \dots$

Quando però nella (2) i coefficienti A, B, C contengono le tre variabili x, y, u , si può dire che la sua integrazione riesce insequibile, ove si prenda a trattarla nella sua generalità. Non sempre così accade ne' casi particolari, uno più specioso de' quali è il seguente. Sia nella (2) A funzione della sola variabile x , e B, C funzioni delle altre due variabili y, u . Se si suppone

$$\left. \begin{aligned} dU &= \mu(Bdu - Cdy) \\ z &= \int_{u_1}^{u''} \Omega_x e^{uV} dx \end{aligned} \right\} \quad (10),$$

avremo manifestamente

$$\begin{aligned} z_{x+1} &= \int_{u_1}^{u''} \Omega_{x+1} e^{uV} du; & \frac{dz}{dy} &= \int_{u_1}^{u''} \Omega_x e^{uV} \frac{dU}{dy} du \\ \frac{dz}{du} &= \int_{u_1}^{u''} \Omega_x e^{uV} \frac{dU}{du} du. \end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nella (2), troveremo riducendo a zero questa equazione

$$0 = \int_{u_1}^{u''} e^{uV} du \left\{ \Omega_{x+1} - A_x \Omega_x + \left(B \frac{dU}{dy} + C \frac{dU}{du} \right) \Omega_x u \right\},$$

la quale importa che sia

$$0 = \Omega_{x+1} - A_x \Omega_x + \left(B \frac{dU}{dy} + C \frac{dU}{du} \right) \Omega_x. \quad (11).$$

Ma essendo

$$dU = \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{du} du,$$

il paragone di questa equazione con la prima delle (10) porge

$$\frac{dU}{dy} = -\mu C, \quad \frac{dU}{du} = \mu B;$$

onde sarà

$$B \frac{dU}{dy} + C \frac{dU}{du} = 0,$$

e la (11) si cangerà in

$$\Omega_{x+1} - A_x \Omega_x = 0.$$

Integrando questa equazione si trova

$$\Omega_x = \Pi_{x-1} (A_x) F(x);$$

onde sostituendo nella seconda delle (10) avremo

$$z = \Pi_{x-1} (A_x) \int_{\omega'}^{\omega''} F(x) e^{\mu U} d\omega,$$

ed ancora più semplicemente

$$z = \Pi_{x-1} (A_x) \int (U) \quad (12)$$

Supponiamo per un caso particolare

$$A = x(x+1), \quad B = y, \quad C = u,$$

e sarà

$$Bdu - Cdy = ydu - udy.$$

Il fattore μ che rende differenziale esatto questo binomio si è

$$\mu = \frac{1}{y' + u^2};$$

onde

$$dU = \frac{y du - u dy}{y' + u^2},$$

e conseguentemente avremo

$$U = \text{arc.} \left(\lg. = \frac{u}{y} \right).$$

Inoltre si ha

$$\Pi_{x-1}(A_x) = (1.2.3... (x-1)) (1.2.3... (x-1)x) = \Gamma(x) \Gamma(x+1) = x \Gamma^*(x)$$

Sostituendo nella (12), troveremo che l'integrale completo dell'equazione a differenze miste

$$z_{x+1} = x(x+1)z_x + y \frac{dz_x}{dy} + u \frac{dz_x}{du}$$

vien dato dalla formola

$$z_x = x \Gamma^*(x) \left[\text{arc.} \left(\lg. = \frac{u}{y} \right) \right].$$

Sino ad ora abbiamo supposto $D=0$ nella prima dell'equazioni (1). Quando ciò non ha luogo, e D è funzione di una sola delle variabili x, y, u , si è mostrato nel §. 1.° come questo termine si debba far disparire dalla (1). Nè grave difficoltà s'incontra nel far libera la suddetta equazione da esso, quando D è funzione delle due variabili y, u . Perciocchè posto

$$z = z' + M,$$

e rappresentando con M una incognita funzione di y, u , si ha

$$z_{x+1} = z'_{x+1} + M; \quad \frac{dz}{dy} = \frac{dz'}{dy} + \frac{dM}{dy}; \quad \frac{dz}{du} = \frac{dz'}{du} + \frac{dM}{du}.$$

Sostituendo questi valori nella (1) segnata in primo luogo risulta

$$z'_{x+1}, M = A(z' + M) + B \left[\frac{dz'}{dy} + \frac{dM}{dy} \right] + C \left[\frac{dz'}{du} + \frac{dM}{du} \right] + D,$$

equazione la quale si può scindere nelle due seguenti

$$0 = D + (A-1)M + B \frac{dM}{dy} + C \frac{dM}{du} \quad (13),$$

$$x'_{x+} = Ax' + B \frac{dx'}{dy} + C \frac{dx'}{du}.$$

L' integrazione della seconda di quest' equazioni si riduce alle cose dette sinora. Per ciò che riguarda la prima, è chiaro che posto

$$BdM + (M(A-1) + D)dy = 0 \\ Bdu - Cdy = 0,$$

e rappresentando con T , U gl' integrali di queste due equazioni differenziali simultanee, si avrà per determinare M l' equazione

$$T = f(U),$$

rappresentando f una funzione arbitraria. Però vuolsi avvertire che per la soluzione del problema basta l' integrale particolare della equazione (13). Che se A , B , C , D fossero funzioni non più delle due variabili y , u , ma sibbene di una sola e medesima di queste variabili, e della variabile x , la determinazione della funzione, che fa svanire D dalla (1) scritta in primo luogo si ridurrebbe ad integrare una equazione della forma della (1) considerata nel §. 1.^o. Finalmente quando D è funzione delle tre variabili x , y , u , non si può far disparire dalla equazione proposta senza evitare la difficoltà di dover integrare un' altra equazione della stessa forma. In questo caso bisogna tentare con altri metodi l' integrazione della proposta equazione (1), ed il lodato Geometra Italiano ha mostrato come vi si perviene in qualche caso particolare (*).

A compimento di questa teorica rimane a vedere co-

(*) V. l' Opuscolo citato, §§. 37 e 38.

me si debba procedere alla integrazione della (1) scritta in secondo luogo. Sia primieramente $D=0$, ed A, B, C funzioni della sola variabile u . Posto che Ω rappresenti una funzione incognita di u ed ω , e

$$z = \int_{\omega}^{\omega'} \Omega \omega^x + \theta \omega \, d\omega,$$

si avrà manifestamente

$$z_{x+1} = \int_{\omega}^{\omega'} \Omega \omega^{x+1} + \theta \omega \, d\omega, \quad z_{\gamma+1} = \int_{\omega}^{\omega'} \Omega \omega^x + \theta \gamma + \theta \, d\omega$$

$$\frac{dz}{du} = \int_{\omega}^{\omega'} \frac{d\Omega}{du} \omega^x + \theta \omega \, d\omega.$$

Sostituendo questi valori nella equazione

$$z_{x+1} = Az + Bz_{\gamma+1} + C \frac{dz}{du} \quad (14),$$

alla quale si riduce la (1) scritta in secondo luogo nel supposto di $D=0$, risulta

$$0 = \int_{\omega}^{\omega'} \omega^x + \theta \omega \, d\omega \left\{ (\omega - A - B\omega^{\gamma}) \Omega - C \frac{d\Omega}{du} \right\},$$

alla quale si soddisfa ponendo

$$0 = (\omega - A - B\omega^{\gamma}) \Omega - C \frac{d\Omega}{du}.$$

E poichè l'integrale di questa equazione si è

$$\Omega = F(\omega) e^{\int \left(\frac{\omega - A - B\omega^{\gamma}}{C} \right) du},$$

si avrà pel completo integrale della (14)

$$z = \int_{\omega}^{\omega'} e^{\int \left(\frac{\omega - A - B\omega^{\gamma}}{C} \right) du} F(\omega) \omega^x + \theta \omega \, d\omega$$

Posto per brevità

$$\int \frac{A}{C} du = U; \quad \int \frac{du}{C} = U^0; \quad \int \frac{B}{C} du = U^0,$$

questa equazione si cangia in

$$z = e^{-U} \int_{\omega'} F(\omega) e^{\omega(U^0 + U^0 \beta U^0)} \omega^{x+\beta} d\omega \quad (15).$$

Quando x ed y sono variabili discontinue e debbono rappresentare numeri interi > 0 , si può eliminare ω da questa equazione nel seguente modo. Si ha evidentemente

$$\frac{d^{x+\beta} \cdot e^{\omega(U^0 + \beta U^0)}}{dU^0{}^x \cdot dU^0{}^y} = e^{\omega(U^0 + \beta U^0)} \omega^{x+\beta};$$

onde la (15) si traduce in

$$z = e^{-U} \int_{\omega'} F(\omega) \frac{d^{x+\beta} \cdot e^{\omega(U^0 + \beta U^0)}}{dU^0{}^x \cdot dU^0{}^y} d\omega.$$

Adesso si osservi che essendo β una costante arbitraria, la quale non ha relazione nessuna con $F(\omega)$, si può supporre $\beta = 1$, e viene

$$z = e^{-U} \int_{\omega'} F(\omega) \frac{d^{x+\beta} \cdot e^{\omega(U^0 + U^0)}}{dU^0{}^x \cdot dU^0{}^y} d\omega;$$

e quindi ponendo mente a quanto si è fatto osservare nel principio del §. 1.° sarà

$$z = e^{-U} \frac{d^{x+\beta} \cdot \psi(U^0 + U^0)}{dU^0{}^x \cdot dU^0{}^y} \quad (16).$$

Supponendo per un caso particolare A, B, C quantità costanti, troveremo

$$z = e^{-\frac{Au}{B}} C \cdot B^{-\omega} \frac{d^{x+\beta} \psi(u)}{du^{x+\beta}} \quad (17).$$

Siano adesso A, B, C funzioni di x, y senza u nella

equazione (14). Posto che Ω rappresenti una funzione incognita di x, y, u , sia

$$z = \int_{\omega}^{\omega''} \Omega e^{u\omega} d\omega \quad (18),$$

e verrà

$$z_{x+1} = \int_{\omega}^{\omega''} \Omega_{x+1} e^{u\omega} d\omega; \quad z_{y+1} = \int_{\omega}^{\omega''} \Omega_{y+1} e^{u\omega} d\omega$$

$$\frac{dz}{du} = \int_{\omega}^{\omega''} \Omega e^{u\omega} \omega d\omega.$$

Sostituendo questi valori nella (14), verrà

$$0 = \int_{\omega}^{\omega''} e^{u\omega} d\omega \{ \Omega_{x+1} - B\Omega_{y+1} - (A + C\omega)\Omega \},$$

equazione alla quale si soddisfa, ponendo

$$0 = \Omega_{x+1} - B\Omega_{y+1} - (A + Cx)\Omega \quad (19).$$

Integrando questa equazione a differenze parziali e finite, avremo Ω , e quindi z mercè l'equazione (18). Ma l'integrazione suddetta è impossibile, quando s' intraprende nella sua generalità.

Supponiamo nuovamente A, B, C quantità costanti. In questo caso l'equazione (19) è integrabile, e paragonata coll'equazione

$$0 = \Omega_{x+1} - a\Omega - b\Omega_{y+1} \quad (20)$$

si ha $a = A + Cx$, $b = B$. Ma Lagrangia ha trovato che l'integrale della (20) si è

$$\Omega = \frac{(-a)^{x+y}}{by} \Delta^x \cdot Fy(x);$$

onde sarà pel caso nostro

$$\Omega = \frac{(A + Cx)^{x+y}}{By} (-1)^{x+y} \cdot \Delta^x \cdot Fy(x);$$

e l' integrale della (14) nel supposto di A, B, C costanti
avrà anche per espressione

$$z = (-1)^{r+1} B^{-r} \int_0^{\infty} (A + Cx)^{r+r} e^{-Cx} \Delta^r \cdot F_1(x) dx$$

ERRORI

Pag. 13. verso 3. eguali
id. 13. eguali
id. 16. cotangente

CORREZIONI

leggi complementari
complementari
tangente







